

Introduction

多くの学生（高校生・浪人生）から「数学の学力が伸びない」「模試で最後の(3)の問題が解けない」といった相談を受けることがよくある。教育に携わる者なら謙しも経験する話だが、ふと「なぜ、そのようなことが起こるのか?」と考えることがある。彼等の相談の内容から感じることは、「やり方(質)」の改善箇所があることと、「量」の少なさである。

下の表で、多くの学生の状況と数学ができる学生の状況の一例を紹介しよう。

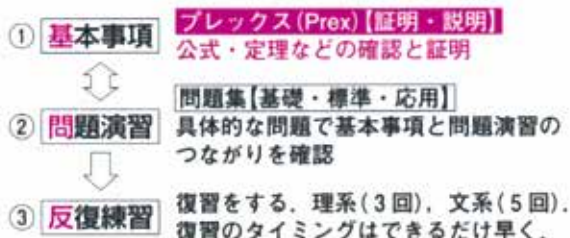
| 多くの学生の状況 | 数学ができる学生の状況 |
|-----------------|--|
| 予習はざっと見て解く程度。 | 予習でわからないところは、教科書などで公式や解法を調べる。 |
| 授業は聞いて理解。 | 授業でわからないところは、後で友達や先生に質問。 |
| ノートは板書を写す。 | ノートは、後からの復習を考えて、見やすく整理してとる。 |
| 復習は1回やればよい方。 | 復習は、「 公式の確認や証明 」などを含めテストの4日前までに一通りやり、残りの3日間 |
| テスト勉強は数日前から始める。 | 間でわからないところを復習する。 |

上の表を見ると、君は「ドキッ」とするかもしれない。他教科の勉強、部活、リラックスと、やりたい事は沢山ある。そのため、数学の勉強はある程度のところまで進めば、そこで終わらせてしまい、本来やるべき勉強量にいたらない。また正しい勉強方法で勉強しようにも、何をどう勉強したらいいのかが分からず、目先の宿題に取り組むだけで終わってしまっていることも……。

このような状況をまとめると、「数学の学力が伸びない」原因の多くは、勉強の「やり方(質)」と「量」に課題がある。

数学の学力を伸ばすために、「やり方(質)」と「量」に関して、次の3つのことが「必要」である。

『数学の効果的な学習』



①～③の中で、本書の立ち位置は、

「公式」「定理」「数学的な考え方」の 「証明(Proof)」と「説明(Explanation)」

に特化した「①基本事項」の参考書である。「基本は、発展の始まり！」であり、「①基本事項」は発展問題や数学の根本理解を助け、数学の学習の「質」を高めるのに役立つ。多くの問題集は「②問題演習」に特化している。さらに、「量」を確保するために複数回の「③反復練習」が必要であり、「③反復練習」がなければ、せっかく勉強した内容も定着しない。

「①基本事項(数学の基礎・基本)」を知り、「②問題演習」をし、「③反復練習」をすれば、数学の学習の「質」と「量」は確保され、多くの学生の課題は解決されるだろう。「質」を確保するためにも、本書を「②問題演習」と共に活用してほしい。

・「練習問題」について

基本事項の証明や説明を読んだ後に簡単な問題(「練習問題」)を用意してある。内容の理解につながるので、解説を読んだ後に是非取り組んでほしい。

・「【発展】項目」について

【発展】としている項目がある。これは、数学的に難しい内容や文系の学生(数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bのみを履修している人)にとって範囲外である内容を含むことを表す。しかし、数学的には大切なものも含むので、心して取り組んでほしい。

最後に、本書の製作にご協力いただいた河合塾数学科の講師の皆様、河合出版の編集部、教え子の柴田君、心から感謝申し上げます。この本で多くの学生の課題が解決されることを願う。

2019年4月

プレックス製作委員会

Contents

| | |
|------|---|
| はじめに | 2 |
|------|---|

数学 I

数と式

| | |
|------------------|----|
| 因数分解(たすき掛け) | 10 |
| 展開の公式とそこから得られる等式 | 11 |
| 絶対値の性質 | 12 |
| 絶対値のついた方程式、不等式 | 13 |
| 平方根の性質 | 14 |
| 2重根号 | 15 |

2次関数

| | |
|--------------------------------------|----|
| 平方完成 | 16 |
| 2次方程式の解(解の公式①) | 17 |
| 2次方程式の解(解の公式②) | 18 |
| 2次方程式の解の個数 | 19 |
| 平行移動(2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ) | 20 |
| x 軸に対しての対称移動 | 21 |
| y 軸に対しての対称移動 | 22 |
| 原点に対しての対称移動 | 23 |
| 2次方程式の重解 | 24 |

図形と計量

| | |
|---------------------------|----|
| 正弦定理 | 25 |
| 余弦定理 | 26 |
| $90^\circ - A$ の三角比 | 27 |
| $180^\circ - \theta$ の三角比 | 28 |
| 三角形の成立条件 | 29 |
| 辺と角の大小関係 | 30 |
| 三角形の面積 | 31 |
| 内接円の半径 | 32 |
| 四角形の面積(対角線の積) | 33 |

数学 A

場合の数

| | |
|------|----|
| 和の法則 | 61 |
| 積の法則 | 62 |

| | |
|---------|----|
| トレミーの定理 | 34 |
| ヘロンの公式 | 35 |
| 面積比 | 36 |

集合と命題

| | |
|-----------|----|
| 集合と要素 | 37 |
| 部分集合と空集合 | 38 |
| 共通部分と和集合 | 39 |
| 全体集合と補集合 | 40 |
| ド・モルガンの法則 | 41 |
| 包除原理 | 42 |
| 命題とその真偽 | 43 |
| 逆・裏・対偶 | 44 |
| 対偶命題と真偽 | 45 |
| 必要条件・十分条件 | 46 |
| 背理法 | 47 |
| 鳩の巣の原理 | 48 |

データの分析

| | |
|------------------|----|
| 四分位数 | 49 |
| 箱ひげ図 | 50 |
| 平均値 | 51 |
| 仮平均法 | 51 |
| 分散①と標準偏差 | 53 |
| 共分散①と相関係数 | 54 |
| 【発展】分散② | 56 |
| 【発展】共分散② | 57 |
| 平均における変量の変換 | 58 |
| 分散・標準偏差における変量の変換 | 59 |
| 共分散における変量の変換 | 60 |

| | |
|----------------|----|
| 順列 | 63 |
| 円順列 | 64 |
| 数珠順列(ネックレスの順列) | 65 |

| |
|---|
| 【発展】数珠順列(ネックレスの順列) …66 |
| 重複順列 …68 |
| 同じものを含む順列 …69 |
| 組合せ …70 |
| ${}_nC_k$ の性質 ① (${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$) …71 |
| ${}_nC_k$ の性質 ② ($k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$) …72 |
| ${}_nC_k$ の性質 ③ (${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$) …73 |

確率

| |
|--------------------|
| 確率の定義 …74 |
| 和事象の確率・確率の加法定理 …76 |
| 独立な試行 …77 |
| 余事象の確率 …78 |
| 反復試行の確率 …79 |
| 条件付き確率 …80 |
| 事象の独立 …81 |

整数

| |
|---------------------------|
| 約数と倍数 …82 |
| 素因数分解と最小公倍数, 最大公約数 …83 |
| 最大公約数と最小公倍数の関係 …84 |
| 倍数の判定法 ① (2の倍数, 5の倍数) …85 |
| 倍数の判定法 ② (4の倍数, 8の倍数) …86 |
| 倍数の判定法 ③ (3の倍数, 9の倍数) …87 |
| 正の約数の個数 …88 |
| 正の約数の総和 …89 |
| 素数の性質 …90 |
| 連続する整数の積 …91 |
| 自然数の積と素因数の個数 …92 |
| 合同式 …94 |
| 合同式の性質 …95 |

| |
|-------------------------------|
| ユークリッドの互除法 …96 |
| 【発展】フェルマーの小定理の準備 ① …97 |
| 【発展】フェルマーの小定理の準備 ② …98 |
| 【発展】フェルマーの小定理 …99 |
| n 進法 ① …101 |
| n 進法 ② …102 |
| n 進法 ③ …103 |
| n 進法 ④ …104 |
| 有限小数 …106 |
| 既約分数を小数で表す …107 |
| 【発展】一次不定方程式 $ax+by=1$ の解 …109 |

平面図形

| |
|-----------------------|
| 三平方の定理(ピタゴラスの定理) …111 |
| 中点連結定理 …112 |
| 角の二等分線(内角) …113 |
| 角の二等分線(外角) …114 |
| 重心 …115 |
| 外心 …116 |
| 内心 …117 |
| 垂心 …118 |
| 傍心(ほうしん) …119 |
| チェバの定理 …120 |
| メネラウスの定理 …121 |
| 円周角の定理 …122 |
| 円に内接する四角形の性質 …123 |
| 接弦定理 …124 |
| 方べきの定理 ① …125 |
| 方べきの定理 ② …126 |
| 円の接線 …127 |
| 中線定理(パポスの定理) …128 |

数学Ⅱ

式と証明

| |
|--------------|
| 等式の証明 …129 |
| 不等式の証明 …130 |
| 3乗の公式 ① …131 |
| 3乗の公式 ② …132 |

| |
|---------------------------------|
| 3乗の公式 ③ …133 |
| 3乗の公式 ④ …134 |
| 3乗の公式 ⑤ …135 |
| 二項定理 …136 |
| $(a+b+c)^n$ の展開式の一般項(多項定理) …138 |

| | |
|-----------------|-----|
| 0以上の実数の大小と平方の大小 | 139 |
| 三角不等式 | 140 |
| 相加平均と相乗平均の大小関係 | 142 |
| コーシー・シュワルツの不等式① | 143 |
| コーシー・シュワルツの不等式② | 144 |

複素数と方程式

| | |
|---------------|-----|
| 共役な複素数の性質① | 145 |
| 共役な複素数の性質② | 146 |
| 2次方程式の解と係数の関係 | 147 |
| 3次方程式の解と係数の関係 | 148 |
| 共役な複素数解の存在 | 149 |
| 剰余の定理 | 150 |
| 因数定理 | 151 |
| 方程式の有理数解 | 152 |

図形と方程式

| | |
|----------------------|-----|
| 数直線上の内分 | 153 |
| 数直線上の外分 | 154 |
| 座標平面上における内分点, 外分点の座標 | 155 |
| 座標平面上における三角形の重心の座標 | 156 |
| 2点間の距離 | 157 |
| 直線の方程式 | 158 |
| 平行条件① | 159 |
| 垂直条件① | 160 |
| 平行条件② | 161 |
| 垂直条件② | 162 |
| 点と直線の距離 | 163 |
| 円の方程式 | 165 |
| 円の接線の公式① | 166 |
| 円の接線の公式② | 167 |
| 極線 | 168 |
| 交点を通る図形①(直線束) | 169 |
| 交点を通る図形②(円束) | 170 |
| 平行移動 | 172 |
| x 軸に関する対称移動 | 173 |
| y 軸に関する対称移動 | 174 |
| 原点に関する対称移動 | 175 |

| | |
|-----|-----|
| 軌跡 | 176 |
| 領域① | 178 |
| 領域② | 179 |
| 領域③ | 180 |

三角関数

| | |
|--------------------------|-----|
| 三角関数の相互関係(一般角) | 181 |
| $\theta \pm 2n\pi$ | 182 |
| 負角公式($-\theta$) | 183 |
| $\theta + \frac{\pi}{2}$ | 184 |
| $\frac{\pi}{2} - \theta$ | 185 |
| $\theta + \pi$ | 186 |
| $\pi - \theta$ | 187 |
| 加法定理(正弦・余弦) | 188 |
| 加法定理(正接) | 190 |
| 2倍角公式 | 191 |
| 3倍角公式 | 193 |
| 積和公式① | 194 |
| 和積公式① | 194 |
| 積和公式② | 195 |
| 和積公式② | 195 |
| 半角公式 | 196 |
| 三角関数の合成①(正弦) | 197 |
| 三角関数の合成②(余弦) | 198 |

指数・対数

| | |
|-------------------------|-----|
| 指数の拡張① | 199 |
| 累乗根の性質 | 200 |
| 指数の拡張② | 202 |
| 指数の大小 | 203 |
| 対数の公式① | 204 |
| 対数の公式② | 205 |
| 対数の公式③ | 206 |
| 対数の大小と真数の大小の関係 | 207 |
| 常用対数の値 | 208 |
| 桁数 | 209 |
| 小数第 n 位に初めて0でない数が現れる数 | 210 |
| 最高位の数の求め方 | 211 |

微分法

| | |
|---|-----|
| 微分係数 | 213 |
| 導関数 | 214 |
| x^n の導関数 | 215 |
| 導関数の性質 | 216 |
| 接線の方程式 | 217 |
| 法線の方程式 | 218 |
| $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号 | 219 |
| 極値と導関数の符号 | 220 |
| 【発展】 $f'(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸(数学Ⅲの内容を含む) | 221 |
| 【発展】曲線 $y=f(x)$ の変曲点(数学Ⅲの内容を含む) | 222 |
| 【発展】3次関数「対称性(変曲点)」(数学Ⅲの内容を含む) | 223 |
| 【発展】3次関数「1:2」の法則(数学Ⅲの内容を含む) | 224 |

【発展】5点定理(数学Ⅲの内容を含む) … 225

積分法

| | |
|---|-----|
| 不定積分 | 226 |
| 定積分 | 227 |
| x^{2n-1} と x^{2n} と c (定数)の定積分の性質 | 228 |
| 定積分と微分 | 229 |
| 積分と面積 | 230 |
| 2曲線間の面積 | 231 |
| $\frac{1}{6}$ 公式① | 232 |
| $\frac{1}{6}$ 公式② | 233 |
| $\frac{1}{3}$ 公式 | 235 |
| $\frac{1}{12}$ 公式 | 237 |

数学B

数列

| | |
|---|-----|
| 等差数列の一般項 | 239 |
| 等差数列の和 | 240 |
| 等比数列の一般項 | 241 |
| 等比数列の和 | 242 |
| Σ の性質 | 243 |
| 数列の和の公式① | 244 |
| 数列の和の公式② | 245 |
| 数列の和の公式③ | 246 |
| 階差数列と一般項 | 247 |
| 部分分数分解を利用した和の計算 | 248 |
| 和と一般項 | 249 |
| Σ [(等差数列) \times (等比数列)] | 250 |
| 漸化式($a_{n+1}=a_n+d$, $a_{n+1}=ra_n$) | 251 |
| 漸化式($a_{n+1}=a_n+(n$ の式)) | 252 |
| 二項間漸化式($a_{n+1}=\rho a_n+q$) | 253 |
| 二項間漸化式($a_{n+1}=\rho a_n+q^n$) | 254 |
| 二項間漸化式($a_{n+1}=\rho a_n+qn+r$) | 255 |
| 三項間漸化式($a_{n+2}+\rho a_{n+1}+qa_n=0$) | 257 |

| | |
|--|-----|
| 連立漸化式($a_{n+1}=\rho a_n+qb_n$, $b_{n+1}=qa_n+pb_n$) | 259 |
| 連立漸化式($a_{n+1}=\rho a_n+qb_n$, $b_{n+1}=ra_n+sb_n$) | 260 |
| 数学的帰納法① | 262 |
| 数学的帰納法② | 263 |
| 数学的帰納法③ | 264 |

ベクトル

| | |
|------------|-----|
| ベクトルの和と差 | 265 |
| ベクトルの実数倍① | 266 |
| ベクトルの実数倍② | 267 |
| 単位ベクトル | 268 |
| ベクトルの成分表示 | 269 |
| ベクトルの平行条件 | 270 |
| ベクトルの大きさ | 270 |
| 内積と成分表示 | 271 |
| 内積の性質 | 272 |
| 垂直なベクトルと内積 | 272 |
| 内分点の位置ベクトル | 273 |

| | |
|--------------------|-----|
| 外分点の位置ベクトル | 274 |
| 中点の位置ベクトル | 275 |
| 三角形の重心 | 276 |
| 直線のベクトル方程式 | 277 |
| 共線条件 | 278 |
| 三角形の面積①(ベクトル表示) | 279 |
| 三角形の面積②(成分表示) | 280 |
| 円のベクトル方程式 | 281 |
| (空間)ベクトルの大きさ(成分表示) | 282 |
| (空間)内積と成分表示 | 283 |
| 平面の方程式 | 284 |
| 共面条件 | 285 |
| 空間における球面の方程式 | 286 |

| | |
|------------|-----|
| 練習問題の解答・解説 | 297 |
|------------|-----|

| | |
|----|-----|
| 索引 | 356 |
|----|-----|

確率分布

| | |
|-------------------|-----|
| 確率変数の期待値 | 287 |
| $aX + b$ の期待値 | 287 |
| 確率変数の分散と標準偏差 | 288 |
| 分散の計算 | 289 |
| $aX + b$ の分散と標準偏差 | 290 |
| 確率変数の和の期待値(同時分布) | 291 |
| 独立な確率変数の積の平均 | 292 |
| 独立な確率変数の和の分散 | 293 |
| 二項分布(平均・分散・標準偏差) | 294 |